Codifica e decodifica delle Terne Pitagoriche Primitive.

Arnaldo Vicentini [1]

1. Terne pitagoriche. Terne pitagoriche primitive.

Diciamo *terna pitagorica* –brevemente *TP*– una terna ordinata di interi positivi tali da potersi pensare misure dei lati di un triangolo rettangolo.Terne pitagoriche sono, per esempio, [3, 4, 5] oppure [8, 15, 17] in quanto $3^2+4^2=9+16=25=5^2$ e $8^2+15^2=64+225=289=17^2$. In formula:

(1) $$[a,\ b,\ c]\in\{TP\} \Leftrightarrow (a,\ b,\ c)\in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N} \ \wedge\ 0<a<b<c \ \wedge\ a^2+b^2=c^2.$$

Diciamo *terna primitiva* una terna di interi positivi il cui massimo divisore comune valga 1. Ci occuperemo solo della ricerca delle *terne pitagoriche primitive* –brevemente *TPP*– in quanto, data una di esse, quelle proporzionali ad essa si ricavano banalmente moltiplicandola per interi maggiori di 1. Non ci occuperemo, ad esempio, delle *TP* quali [6, 8, 10] o [24, 45, 51] ottenibili raddoppiando le componenti di [3, 4, 5] o triplicando quelle di [8, 15, 17].

2. All'origine della questione...

Pitagora nacque a Samo circa il 480 a. C e morì nel 560 a. C. a Crotone dove aveva fondato e diretto fino alla morte una scuola filosofico-scientifica dal comportamento quasi di setta religiosa. Come per Socrate, nulla di scritto ci è da lui pervenuto direttamente; e tuttavia, come Socrate in filosofia, così Pitagora in matematica resta un caposaldo della cultura greca, vera radice della nostra cultura occidentale. Oltre al notissimo *Teorema di Pitagora*, alla scuola pitagorica è attribuita la scoperta dei numeri irrazionali attraverso il teorema che dimostra che il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili, (il che significa che nessuna coppia di interi dà per rapporto $\sqrt{2}$, cioè che $\sqrt{2}$ non può essere razionale). A Pitagora è anche attribuita la soluzione del problema di trovare infiniti triangoli rettangoli con i lati di misura intera, – detto appunto *problema pitagorico*–, ossia terne di numeri interi [a, b, c] tali che la somma dei quadrati di a e di b valga il quadrato di c. La soluzione di Pitagora è particolare: i triangoli trovati sono tutti e soli quelli che hanno l'ipotenusa un'unità più lunga del cateto maggiore. Il metodo di Pitagora è riferito con precisione da Proclo Diadoco (5° secolo d. C.) e comporta un triangolo rettangolo per ogni arbitrario numero dispari.

Ecco il metodo di Pitagora con parole moderne:
– Prendi per cateto minore a un dispari arbitrario (maggiore di 1), diciamo $2k+1$, con $k = 1, 2, 3, ...$
– Fa' il quadrato di a, togli 1 e dividi per 2: e poni il risultato –che è $2k(k+1)$– come cateto maggiore b.
– Aggiungi 1 a b: quel che risulta, –cioè $2k(k+1)+1$– è l'ipotenusa c. (Si controlli che allora $a^2 + b^2 = c^2$).

Platone risolse in seguito lo stesso problema trovando infiniti triangoli rettangoli distinti con il cateto minore di misura un numero pari. Una soluzione completa del problema pitagorico consiste nel generare tutte le possibili terne pitagoriche primitive e metterle in corrispondenza biunivoca con i numeri interi positivi. Allora una terna qualsiasi resterebbe codificata da una coppia di interi positivi arbitrari (n, q) col significato di: terna pitagorica ottenuta moltiplicando per q la terna pitagorica primitiva numero n.

3. Liste ed alberi.

Una *lista infinita* è una struttura di elementi omogenei posti in ordine nella quale ogni elemento ha il successore ed il predecessore, tranne l'elemento iniziale che non ha il predecessore ma solo il successore. Un *albero n-ario infinito* è una struttura analoga alla lista con la differenza, però, che ogni elemento ha n successori anziché uno soltanto, mentre il predecessore di ogni elemento –tranne quello iniziale che non ha predecessore– è unico. Nell'albero, gli elementi sono posti nei *nodi*, il nodo iniziale è detto *radice* e ogni nodo è collegato a ciascun suo successore con un *ramo*. Un esempio basterà per fissare le idee. Una progressione geometrica di termine iniziale A e rapporto k diverso da zero, ossia:

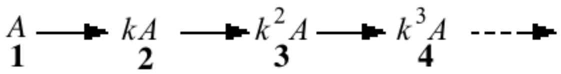
(2) $a_1 = A$; per ogni n intero positivo $a_{n+1} = k\, a_n$,

è rappresentabile con una lista. Invece, dati h e k diversi da zero e diversi uno dall'altro, la struttura:

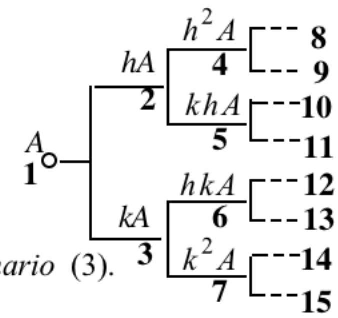
(3) $a_1 = A$; per ogni n intero positivo: $a_{2n} = h \cdot a_n$; e $a_{2n}+1 = k \cdot a_n$

è rappresentabile con un *albero binario*. La lista può anche essere considerata un *albero unario*.

La figura che segue mostra il grafo della lista (2) e quello dell'albero binario (3).



Grafo della *lista* (2).



Grafo dell'*albero binario* (3).

4.L'albero ternario delle Terne Pitagoriche Primitive.

In un albero ternario contrassegnamo i tre successori di ogni nodo con gli aggettivi *alto*, *basso* e *centrale* e collochiamo nella *radice* la terna pitagorica *fondamentale* $\boldsymbol{t}_f = [3,\ 4,\ 5]$. Per ogni nodo occupato dalla generica terna $\boldsymbol{t} = [x,\ y,\ z]$, calcoliamo le terne $\boldsymbol{t}_A = [x_A,\ y_A,\ z_A]$, $\boldsymbol{t}_B = [x_B,\ y_B,\ z_B]$ e $\boldsymbol{t}_C = [x_C,\ y_C,\ z_C]$ da collocare nei tre rispettivi nodi successori *alto*, *basso* e *centrale* nel modo seguente:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_A &= x - 2y + 2z; & x_B &= -2x + y + 2z; & x_C &= 2x + y + 2z;\\ y_A &= 2x - y + 2z; & y_B &= -x + 2y + 2z; & y_C &= x + 2y + 2z;\\ z_A &= 2x - 2y + 3z; & z_B &= -2x + 2y + 3z. & z_C &= 2x + 2y + 3z. \end{aligned}$$

Le (4) si possono scrivere concisamente in forma *matriciale* chiamando *A* (come *Alto*), *B* (come *Basso*) e *C* (come *Centrale*) le *trasposte* della *matrici dei coefficienti* dei rispettivi sistemi lineari (4). Ossia:

$$(5)\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ \textit{Inversa di } C\text{: } C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(6)\qquad \boldsymbol{t}_A = \boldsymbol{t}\cdot A; \qquad \boldsymbol{t}_B = \boldsymbol{t}\cdot B; \qquad \boldsymbol{t}_C = \boldsymbol{t}\cdot C; \qquad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_C \cdot C^{-1}.$$

Naturalmente, i *podotti matriciali* indicati nelle (6) sono quelli *"righe per colonne"*.

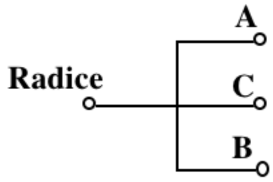
I successori di [3, 4, 5] risultano $\boldsymbol{t}_A = [5,\ 12,\ 13]$, $\boldsymbol{t}_B = [8,\ 15,\ 17]$ e $\boldsymbol{t}_C = [20,\ 21,\ 29]$ poiché:

$$\boldsymbol{t}_f \cdot A = [3,\ 4,\ 5]\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [3\cdot 1 + 4\cdot(-2) + 5\cdot 2,\ \ 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 5\cdot 2,\ \ 3\cdot 2 + 4\cdot(-2) + 5\cdot 3] = [5,\ 12,\ 13];$$

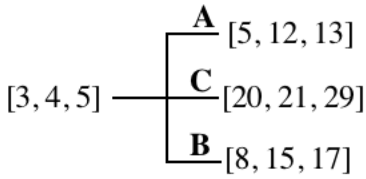
$$\boldsymbol{t}_f \cdot B = [3,\ 4,\ 5]\cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [3\cdot(-2) + 4\cdot 1 + 5\cdot 2,\ \ 3\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 5\cdot 2,\ \ 3\cdot(-2) + 4\cdot 2 + 5\cdot 3] = [8,\ 15,\ 17];$$

$$\boldsymbol{t}_f \cdot C = [3,\ 4,\ 5]\cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2,\ \ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2,\ \ 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3] = [20,\ 21,\ 29];$$

La figura che segue mostra la prima ramificazione del nostro albero ternario.



Inizio d'un generico albero ternario.



Inizio dell'albero ternario delle *TPP*.

Operando ricorrentemente allo stesso modo per ogni successore di ogni nuovo nodo raggiunto, progressivamente l'albero si riempie di *TPP*. Si dimostra che tale albero ternario infinito contiene tutte e sole le *TPP*.

5. Codifica e decodifica delle Terne Pitagoriche Primitive.

Incominciamo col numerare i nodi dell'albero ternario come segue:

– Alla radice diamo il numero 1;

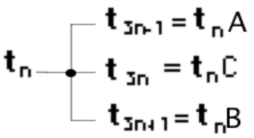
– Ai tre successori *alto*, *basso* e *centrale* del nodo n diamo rispettivamente i numeri $3n-1$, $3n+1$ e $3n$.

La figura che segue mostra lo schema di numerazione e la parte d'albero dei primi 40 nodi.

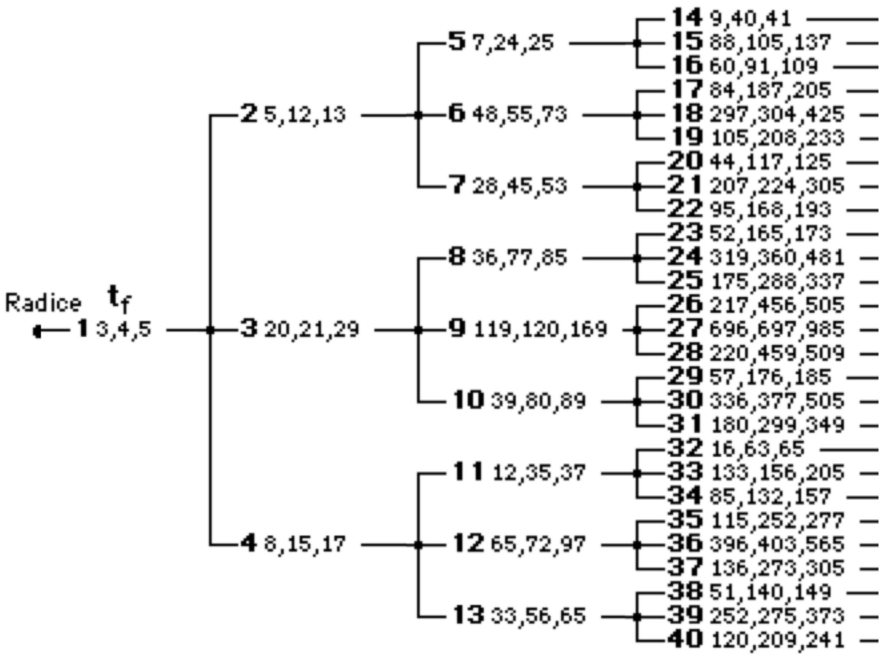
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$



Numerazione dei nodi.



I primi 40 nodi dell'albero ternario delle *TPP* .

Per codifica di una *TPP* si intende l'assegnare ad essa un certo intero n che la rappresenti senza equivoci. Per decodifica si intende determinare la *TPP* di cui il dato intero n è il codice. Tanto la codifica quanto la decodifica si possono basare sulla corrispondenza biunivoca tra il percorso dalla radice ad un certo nodo e la terna che lo occupa. Il percorso è ben rappresentato da una parola sull'alfabeto {A, B, C} che dà la catena dei prodotti matriciali per cui moltiplicare la terna fondamentale per ottenere quella d'un certo nodo.

Per esempio, –come risulta dalla figura dell'albero–, la parola vuota corrisponde al numero 1 e alla terna della radice; la terna numero 21, cioè [207, 224, 305] corrisponde alla parola 'ABC' perchè si ottiene moltiplicando prima [3, 4, 5] per la matrice *A*, poi il risultato [5, 12, 13] per *B* ottenendo [28, 45, 53] e infine questa per *C*.

Codifica. Se fosse noto il percorso, ossia la parola corrispondente, il numero n di una data *TPP* si otterrebbe facilmente con questo algoritmo:

- Parti da n=1; se la parola non è vuota, per ogni sua lettera dalla prima all'ultima fa:
  moltiplica il numero per 3, e se la lettera è 'A' togli 1, se è 'B' aggiungi 1, (se è 'C' non devi far più nulla).

Si tratta dunque di individuare la parola che corrisponde al percorso. A tale scopo è utile questo algoritmo che trova la parola retrocedendo verso la radice sino a che non la trova (o evidenzia che la terna di partenza non può essere una *TPP*):

- Data una terna $\boldsymbol{t}$=[a, b, c] presunta *TPP*, parti con la parola p vuota e, fintantochè $(a>3$ e $b>4$ e $c>5)$, fa':
  1) moltiplica $\boldsymbol{t}$ per l'inversa di *C*, ossia calcola: $x=2a+b-2c$; $y=a+2b-2c$; $z=-2a-2b+3c$;
  2) se è $x>0$ allora passa da p a $'\mathrm{C}'+p$
     altrimenti
       sostituisci x col suo opposto (cambiandogli segno);
       se ora è $x<y$ passa da p ad $'\mathrm{A}'+p$
         altrimenti scambia fra loro x ed y e passa da p a $'\mathrm{B}'+p$;
  3) rinomina [a, b, c] la terna [x, y, z];
  4) se ora è (($a=3$ e $b=4$ e $c=5$) p è la parola giusta; ma se è $(a>3$ oppure $b>4$ oppure $c>5)$
     puoi pure smettere perché la terna di partenza non era una *TPP*.

Decodifica. Dato un intero positivo n arbitrario, se questo vale 1 la terna cercata è quella fondamentale [3, 4, 5], altrimenti occorre trovare il percorso dalla radice alla cercata *TPP* nel modo che segue:

– Parti con la parola p vuota e, fintantoché è $n > 1$, fa':

1) Aggiungi 1 ad n e poi dividi per 3 trovando un quoziente q e un resto r;

2) Se il resto r vale 2 passa da p a p +'A', se vale 1 passa da p a p +'C', se vale 0 passa da p a p +'B';

3) Chiama ora n quello che era il quoziente q.

Nota la parola p che individua il percorso:

– Parti con $\boldsymbol{t} = [3, 4, 5]$; per ogni lettera di p dalla prima all'ultima:

passa da $\boldsymbol{t}$ al prodotto di $\boldsymbol{t}$ per la matrice A se la lettera è A, per B se è la lettera 'B', per C se la lettera è 'C'.

Come si vede, programmare al *computer* l'algoritmo di co-decodifica è facilissimo in qualsiasi linguaggio evoluto.

5. Qualche osservazione sull'albero ternario delle *TPP*.

1) Date due *TPP* qualsiasi, si ponga su di esse questo problema:

- Determinare, se esiste, una sostituzione lineare omogenea che trasformi una terna nell'altra e con le seguenti proprietà: a) I coefficienti devono essere tutti interi; b) Il determinante della matrice dei coefficienti deve valere 1 oppure -1. Orbene: l'albero ternario permette di stabilire che tale sostituzione esiste ed è unica; e di determinarla facilmente. Infatti...

Dati due nodi qualsiasi h e k dell'albero (e le rispettive *TPP*), o uno è discendente diretto dell'altro attraverso un percorso tutto in avanti, oppure c'è un unico percorso che li collega con una parte a ritroso e una in avanti passando per il capostipite comune. Muoviamoci lungo il percorso che collega il nodo h col nodo k e partiamo con la matrice identità. Ad ogni passo facciamo il prodotto per la matrice corrispondente se il passo è in avanti, per la sua inversa se il passo è a ritroso. Si osservi che il determinante di ciascun fattore vale 1 oppure -1. Si ottiene dunque una matrice P di numeri tutti interi tale che:

$$\boldsymbol{t}_k = \boldsymbol{t}_h \cdot P; \quad \boldsymbol{t}_h = \boldsymbol{t}_k \cdot P^{-1}; \quad \det(P) = \det(P^{-1}) = 1 \text{ oppure } \det(P) = \det(P^{-1}) = -1. \tag{7}$$

2) Come si controlla direttamente, la matrice C trasforma una terna qualsiasi $[x, y, z]$ in un'altra $[x', y', z']$ tale che $y' - x' = y - x$; e una *TPP* in un'altra *TPP* a componenti maggiori. Scegliendo, a partire da un nodo arbitrario, sempre il successore centrale, a lungo andare il rapporto tra la prima e la seconda componente tende ad 1; e il corrispondente triangolo rettangolo tende ad essere isoscele. In effetti $[1, 1, \sqrt{2}]$ è un autovettore di C di autovalore $3 + 2\sqrt{2}$.

Analogamente, partendo da un nodo arbitrario e scegliendo sempre il successore *alto*, resta costante la differenza tra la terza e la seconda componente; e il corrispondente triangolo rettangolo tende ad essere degenere, ossia tende a zero il rapporto tra il cateto minore e il maggiore e ad 1 il rapporto tra questo e l'ipotenusa. In effetti, [0, 1, 1] è un autovettore di A di autovalore 1.

Scegliendo invece, a partire da un nodo qualsiasi, sempre il successore *basso*, la prima componente tende a diventare metà dell'ipotenusa; e il corrispondente triangolo rettangolo tende a quello che è metà d'un triangolo equilatero. In effetti, $[1, \sqrt{3}, 2]$ è un autovettore di B di autovalore $2 + \sqrt{3}$.

---

1 *Cfr.* A.Vicentini, *L'albero delle terne pitagoriche primitive,* in: " Periodico di matematiche, organo della MATHESIS", Serie VII–Vol. 5–Nr. 2-3–apr./sett. 1998.